第一章 质点振动学基础

樊 华

重庆医科大学生物医学工程系

重庆医科大学医学超声工程研究所

重庆市-科技部共建超声医学工程重点实验室

二〇〇九年八月

内容提要

➔单质点振动系统

➔自由振动 ★

➔运动方程及其解

➔自由振动的能量

➔单质点的阻尼振动

➔单质点的强迫振动

➔力—电—声类比

声学之父克拉尼
德国科学家
研究板振动

现代声学奠基人瑞利（Rayleigh）
（1842-1919）
《声的理论》

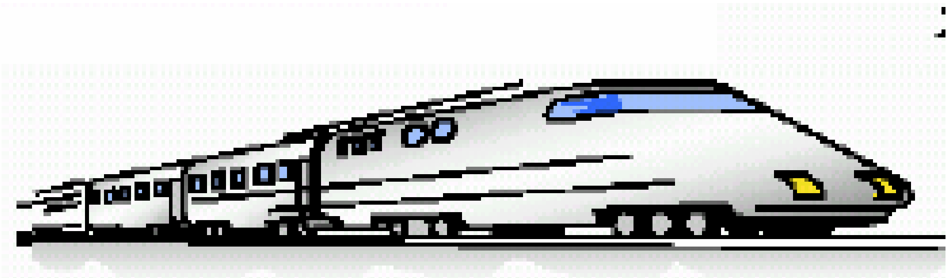
1. 掌握
   1.1单质点自由振动系统、运动方程及其解，简谐振动、相位和圆频率；
   1.2位移、速度、加速度与时间的关系；如何根据初始条件确定运动方程；
   1.3 自由振动的能量，动能和势能；
   1.4振动的复数表示；
2. 了解
   2.1 单质点阻尼振动
   2.2 力-电-声类比
3. 知识
   高等数学知识；
4. 课后
   习题

一、单质点振动系统

➔振动与声波的关系？

声波是机械波，是机械振动在弹性媒质中的传播。

振动是声波的波源（因），声波是振动的传播形式（果）。



一、单质点振动系统

1.1 基本概念

➔物理上总可以把物体看作许多质点的组合。

➔所谓质点振动系统，就是假设构成振动系统的物体如质量块、弹簧等，不论其几何大小如何，都可以看成是一个物理性质集中的系统，对于这种系统，质量块的质量认为是集中在一点的，这就是说，构成整个振动系统的质量块与弹簧，它们的运动状态都是均匀的。这种振动系统也称之为理想参数系统。

➔决定一个系统是否为质点振动系统，不是看它的绝对几何尺寸，而是看物体线度与振动产生的声波波长之比。

➔最简单的振动系统应是单质点振动系统。

➔质点：在声学中是指尺度比声波波长小很多的物体的一种简化近视。

➔质点是忽略物质的原子性的。

一、单质点振动系统

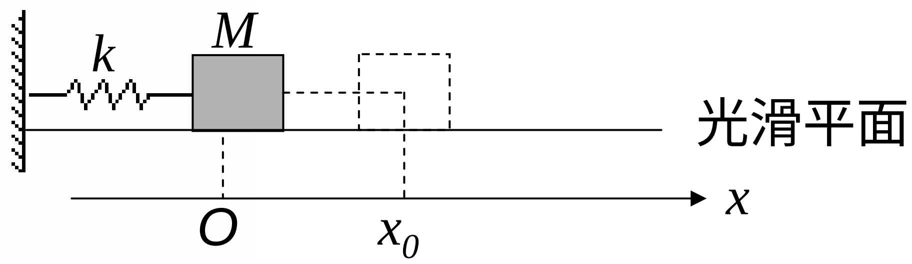
1.2 单质点的自由振动

1.2.1 运动方程及其解

➔振动系统原件

质量块（M）

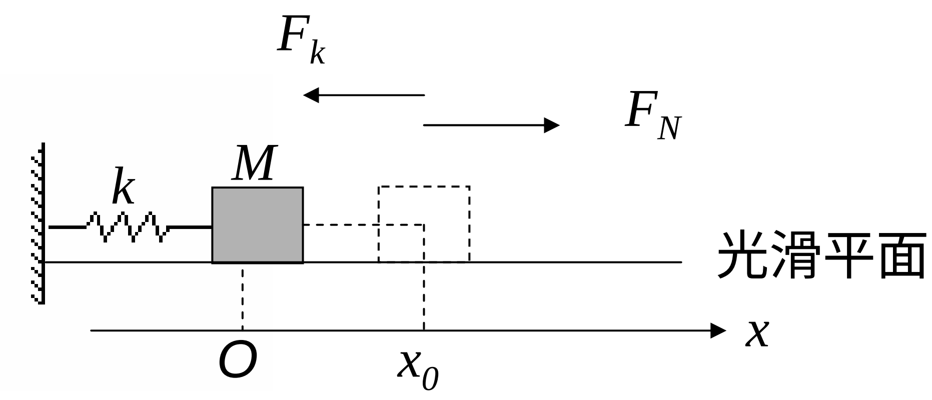
弹簧（弹性系数或者劲度系数 k）



单质点自由振动系统

一、单质点振动系统

➔受力分析



单质点自由振动系统

弹力F_k、牛顿力F_N

力的平衡：$F_k = F_N$

一、单质点振动系统

虎克定律： $F_k = -kx$

牛顿第二定律： $F_N = M\dfrac{d^2x}{dt^2}$

力平衡原理

即： $M\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

令： $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$

振动角频率 ⟶ 则有： $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

自由振动方程

求解这个二阶齐次常微分方程便可以得到自由振动方程的通解。

Haifu

一、单质点振动系统

➔ 自由振动方程的通解

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

式中A，B为待定常数，由振动初始条件确定。

将上述解变形可得：$x = x_a\cos(\omega_0 t - \varphi_0)$

$x_a = \sqrt{A^2 + B^2}$

振幅

$\varphi_0 = \arctan\dfrac{B}{A}$

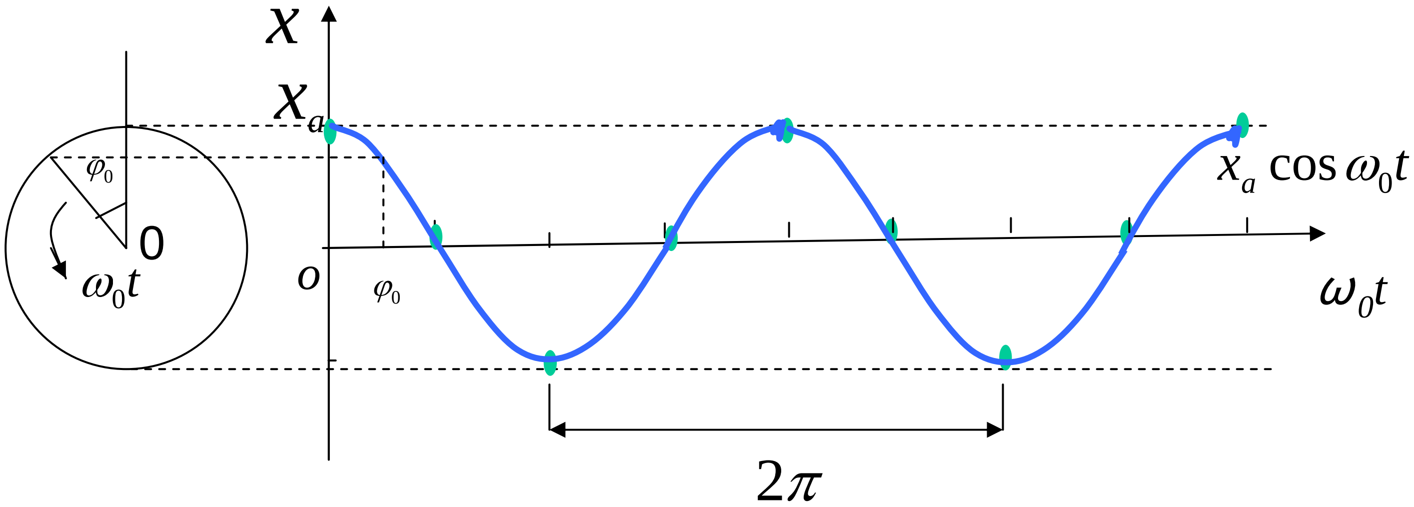
初相位

这种用余弦（或正弦）函数表示其位移（或振速、加速度）的振动称为简谐振动。

重庆医科大学

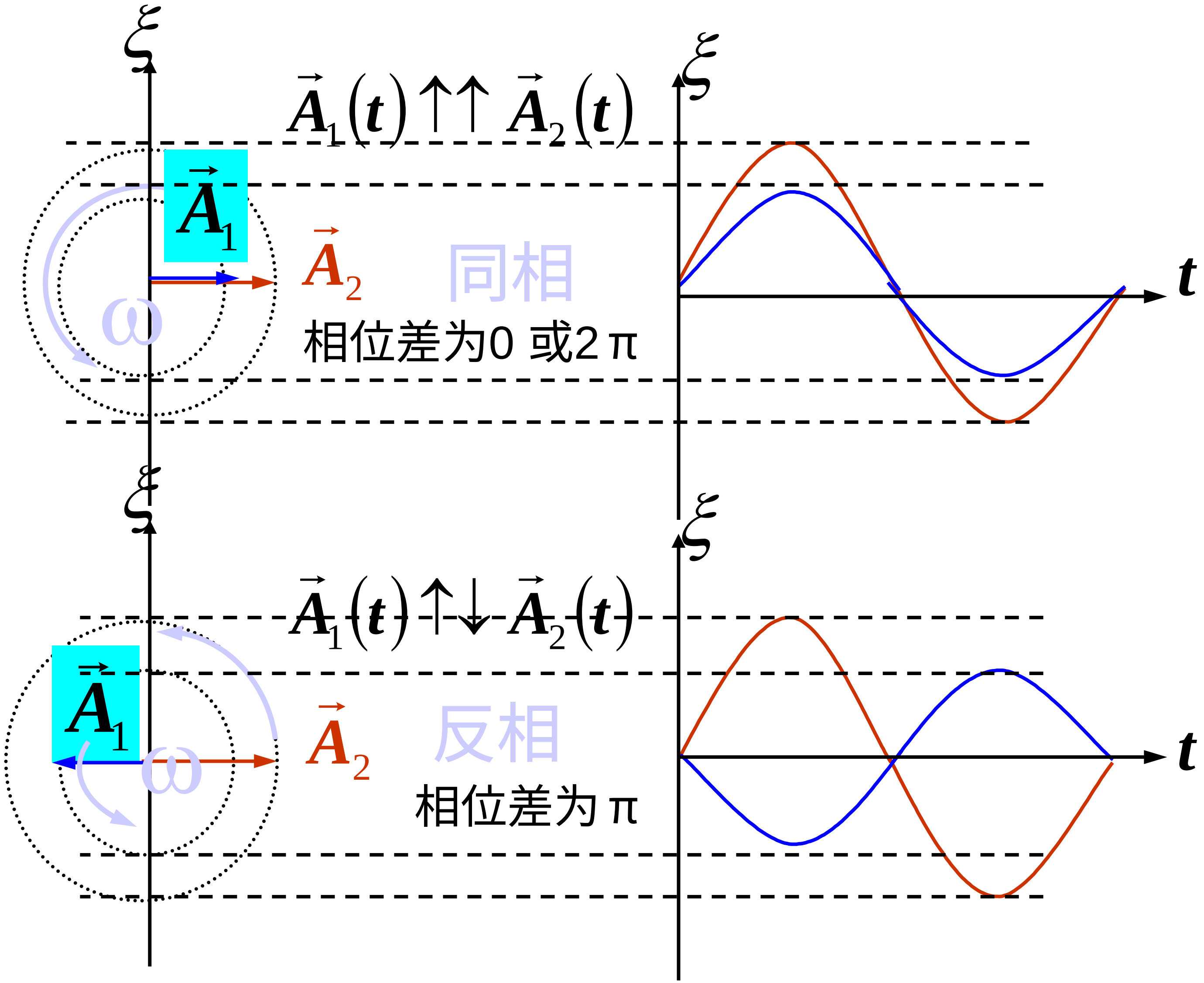
一、单质点振动系统

简谐振动的参考圆图解



相位 ：在一个振动周期内质点所处的具体振动状态，一个质点开始振动的相角值就称为初相位。

重庆医科大学


ξ
$\vec{A}_1(t)\uparrow\uparrow\vec{A}_2(t)$
$\vec{A}_1$
$\vec{A}_2$
同相
ω
相位差为0 或2 π
t
$\vec{A}_1(t)\uparrow\downarrow\vec{A}_2(t)$
反相
相位差为 π

圆频率 ：在一个振动周期内，单位时间振动相位的变化。

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}}$$

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

系统的固有振动频率

如果要降低固有振动频率？

一、单质点振动系统

➔位移x，振速v和加速度a与时间t之间的关系

知道了质点振动的方程，通过对时间t求一阶、二阶导数便可以求出质点振动的速度和加速度。

$$x = x_a \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x_a \omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi_0 + \pi)$$

$$= v_a \cos(\omega_0 t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$v_a = \omega_0 x_a$$

质点振动速度的振幅

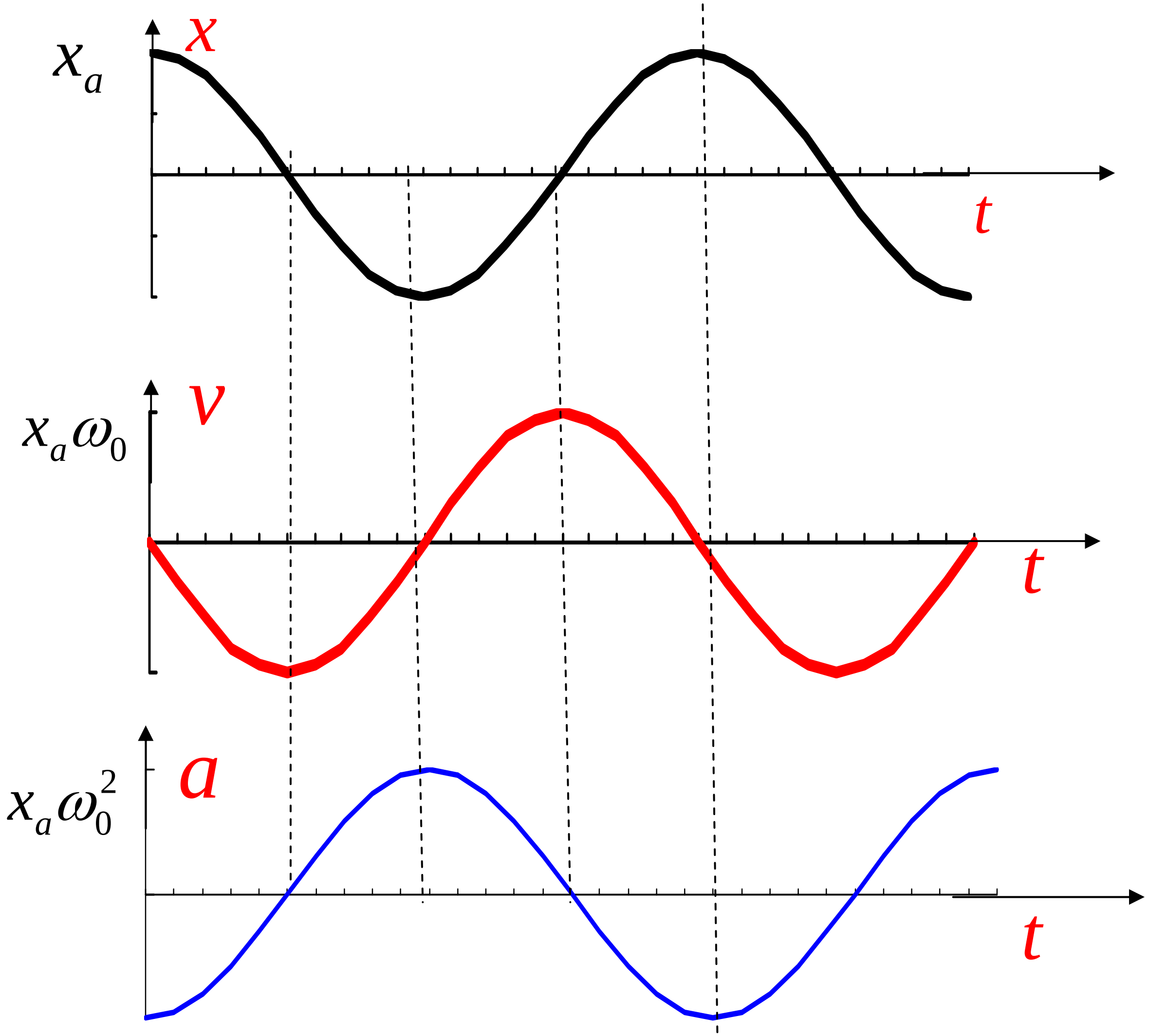
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = a_a \cos(\omega_0 t - \varphi_0 + \pi)$$

$$a_a = v_a \omega_0 = \omega_0^2 x_a$$

质点振动加速度的振幅

一、单质点振动系统

位移x，振速v和加速度a与时间t之间的关系



一、单质点振动系统

1.2.2 自由振动的能量

动能

$$E_K = \frac{1}{2} M v^2$$

势能

$$E_p = \int_0^x k\, x dx = \frac{1}{2} k x^2$$

总的振动能量 $E = E_p + E_K = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} M v^2$

一、单质点振动系统

1.2.3 振动的复数表示

数学知识：

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$j=\sqrt{-1}$ 为虚数单位

$$\mathrm{Re}\left[e^{j\omega t}\right] = \cos\omega t$$ 取实部

$$\mathrm{Im}\left[e^{j\omega t}\right] = \sin\omega t$$ 取虚部

一、单质点振动系统

- 振动的复数表示形式

根据上述数学公式，单质点自由振动方程可表示为：

$$x = x_a \operatorname{Re}\left[e^{j(\omega_0 t-\varphi_0)}\right]$$

对上式求一阶和二阶微分，即：

$$v = x_a \operatorname{Re}\left[j\omega_0 e^{j(\omega_0 t-\varphi_0)}\right] = \omega_0 x_a \cos(\omega_0 t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

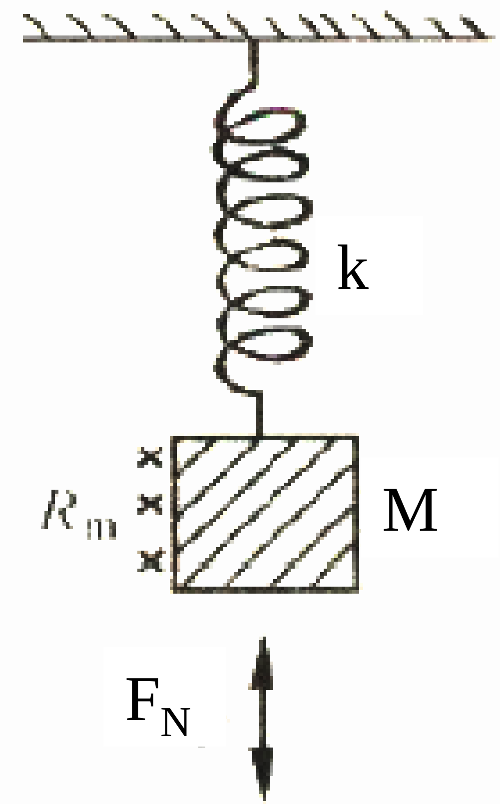
$$a = x_a \operatorname{Re}\left[-\omega_0^2 e^{j(\omega_0 t-\varphi_0)}\right] = \omega_0^2 x_a \cos(\omega_0 t - \varphi_0 + \pi)$$

注：在振动及其声学中，没有特殊说明一般均取实部。

一、单质点振动系统

- 单质点的阻尼振动

任何实际的振动系统在作自由振动时都会出现逐渐衰减的过程，即系统在振动过程中会收到阻尼力的作用。这种振动称为阻尼振动，也称衰减振动。



单质点的阻尼振动

- 阻尼力 $F_R = -R_m v = -R_m \dfrac{dx}{dt}$

阻力系数或力阻

1. 阻尼力是速度的函数
2. 在讨论小阻力情况下，可以认为阻尼力和速度成线性关系。

$$\delta = \frac{R_m}{2M}$$ 衰减系数

力平衡 $F_K + F_R = F_N$

振动方程 $M\dfrac{d^2x}{dt^2} + R_m\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0$$

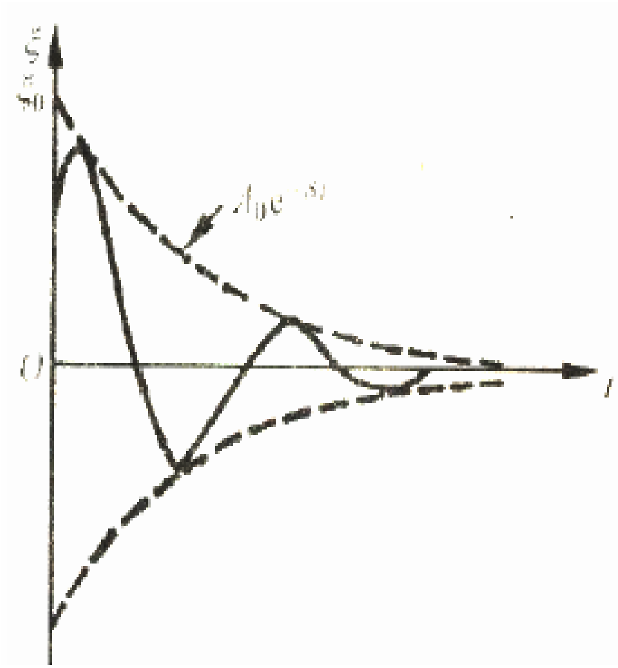
阻尼振动的解 $x = x_a e^{-\delta t}\cos(\omega_0' t - \varphi_0)$

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$$

单质点的阻尼振动

- 阻尼振动的一般规律

1. 衰减模量：振幅衰减到最大振幅的1/e时的时间。$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2M_m}{R_m}$$
2. 相隔一个周期的相邻两次振动的振幅幅值的比值：$$\eta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\delta T}$$



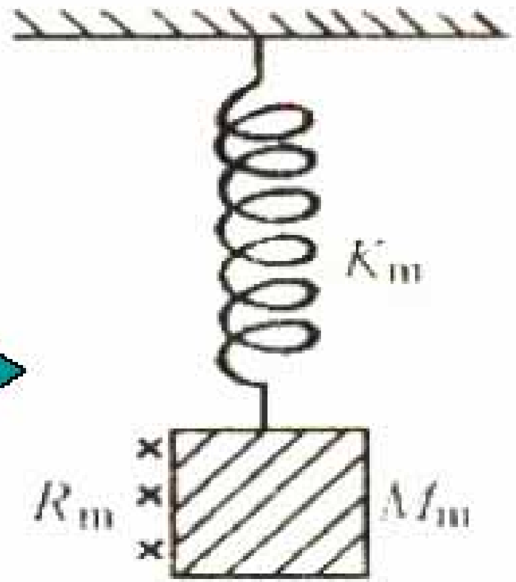
振幅的衰减以几何级数规律进行

强迫振动

一个振动系统受到阻力作用后振动不能永远维持，它要渐渐衰减到停止，因此要使振动持续不停，就要不断从外部获得能量，这种受到外部持续作用的振动就称为强迫振动（forced vibration）。

强迫振动

强迫振动示意图



系统受到的外力或强迫力为:

$$F_F = F_a \cos \omega t$$

强迫振动

强迫振动方程：

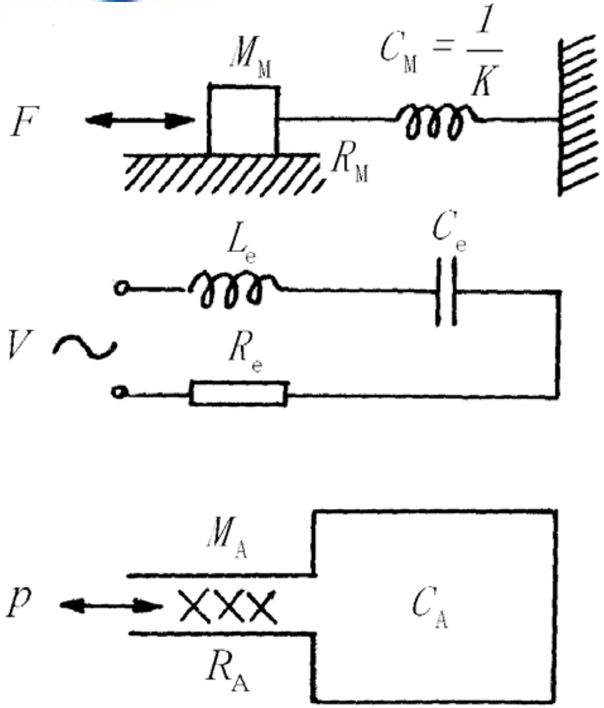
$$M_m \frac{d^2 X}{dt^2} + R_m \frac{dX}{dt} + K_m X = F_a \cos \omega t$$

令 $H = F_a / M_m$（单位质量上作用的力）

外力采用复数形式，于是运动方程为：

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\delta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = He^{j\omega t}$$

力—电—声类比



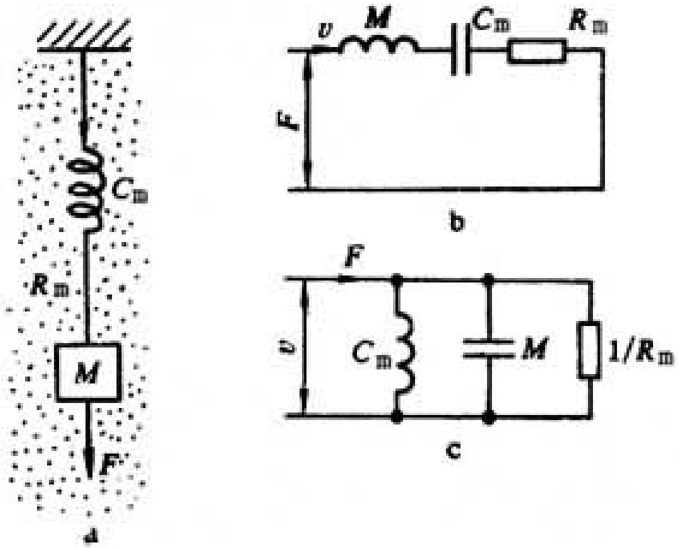


图 1　机械振动系统及其等效力学线路
a　机械振动系统　b　阻抗型类比线路

电-力-声 类 比

电　学	力　　学		声　　学
	阻抗型类比	导纳型类比	阻抗型类比
电压　e	力　F	振动速度 v	声压　p
电流　i	振动速度　v	力　F	体积速度　U
电感　L	质量　M	力顺　C_m	声质量　M_a
电容　C_e	力顺　C_m	质量　M	声顺　C_a
电阻　R_e	力阻　R_m	力导　$1/R_m$	声阻　R_a

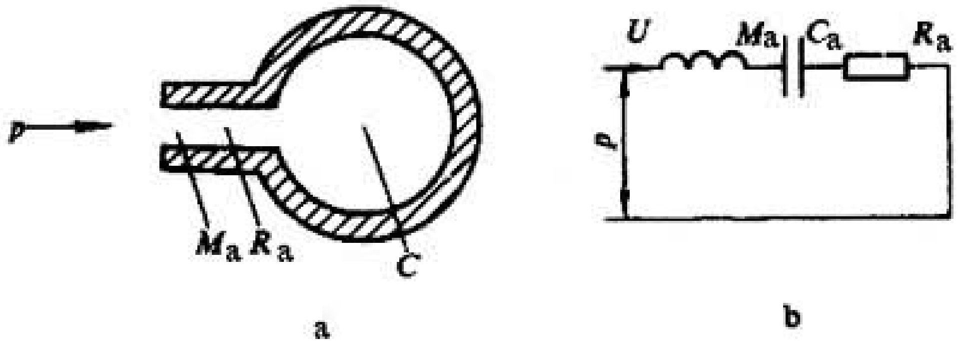


图 2　声振动系统及其等效声学线路
a　声振动系统　b　阻抗型类比线路

Haifu

力—电—声类比

电学	力学		声学
	阻抗型	导纳型	阻抗型
恒压源 E	恒力源 F	恒速源 u	恒压源 p
恒流源 I	恒速源 u	恒力源 F	恒流源 U
电流 I	速度 u	力 F	体积速度 U
电压 E	力 F	速度 u	声压 p
电感 L_e	质量 M_M	力顺 C_M	声质量 M_A
电容 C_e	力顺 C_M	质量 M_M	声容 C_A
电阻 R_e	力阻 R_M	力导 G_M	声阻 R_A
变压器 ($1:n$; I_1, I_2; E_1, E_2)	力—声变量器: 阻抗型力端 (F, u)	$S:1$	阻抗型声端 (U, p)