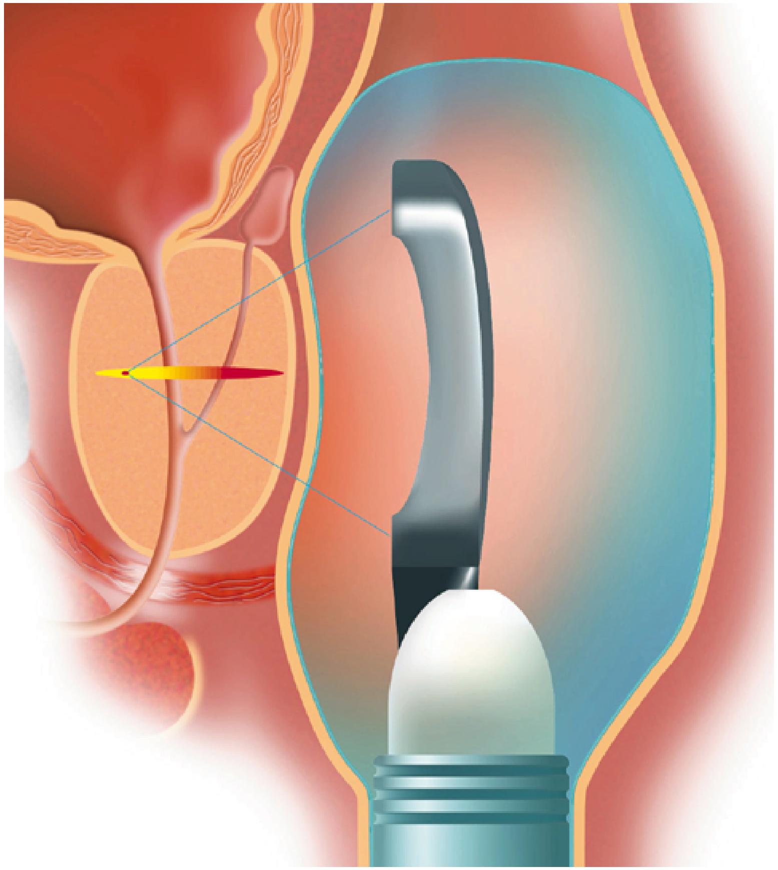
第4章：超声波的传播特性

医学超声中的介质



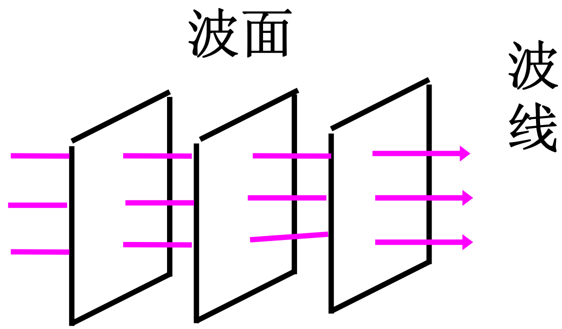
平面超声波

$$X = X_0 \cos \omega t \longrightarrow P = P_0 e^{i\omega t}$$

$$P = P_0 \cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$$

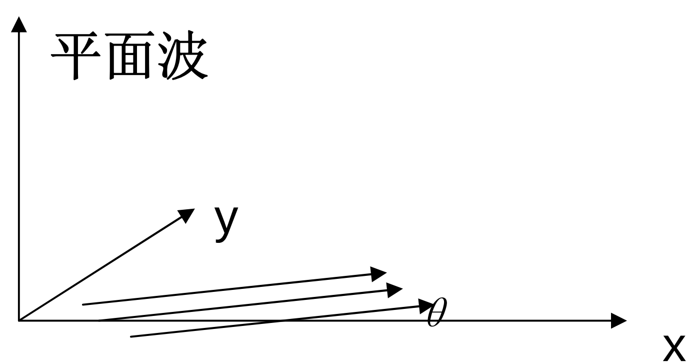
$$P(x, y, z, t) = P_0 e^{-i(\omega t - kx)} = P_0 e^{-i\omega t} e^{ikx}$$

$$P = P_0 e^{ikx}$$



$$P(x, y, z, t) = P_0 e^{-i(kx + \omega t)} = P_0 e^{-i\omega t} e^{-ikx}$$

$$P = P_0 e^{-ikx}$$

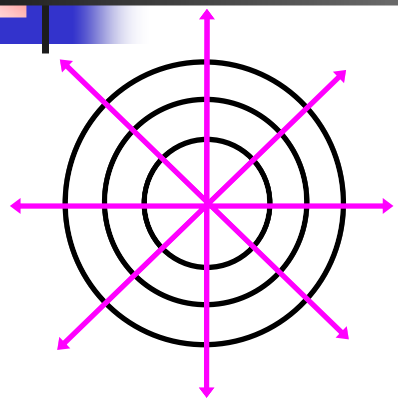


$$P = A e^{i(kx\cos\theta + ky\sin\theta - \omega t)}$$

$$P = A e^{i(kx\cos\theta + ky\sin\theta)}$$

无限大的活塞平面换能器 D>> λ

球面超声波



球面波

$$P = \frac{P_1 \exp(ikr)}{r} \qquad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

对于发射声波的换能器,只要它的孔径远小于波长,它们产生的声场就可以看成向外发散的球面波, 一个完成的球壳声源会向球心发射会聚的球面波

$$P = \frac{P_0 e^{-kr}}{r}$$

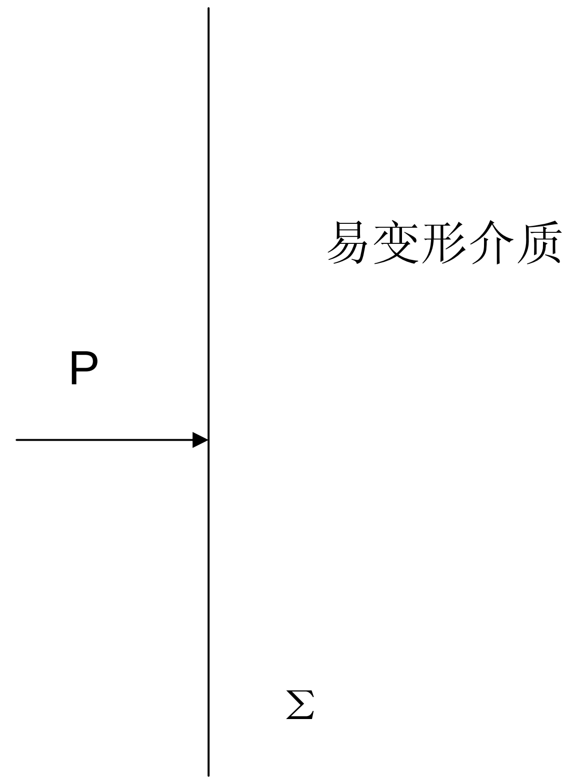
边界条件

- 表征介质分界面两侧的声学参量之间的关系的函数趁为声学边界条件.
- 传播介质的边界形式有两种给定方式:
- 1)、给定分界面一边的声学参数值
- 2）给定分界面两边的声学参数的关系

第一类、第一种边界条件

- 给定边界上的力，绝对软边界条件：

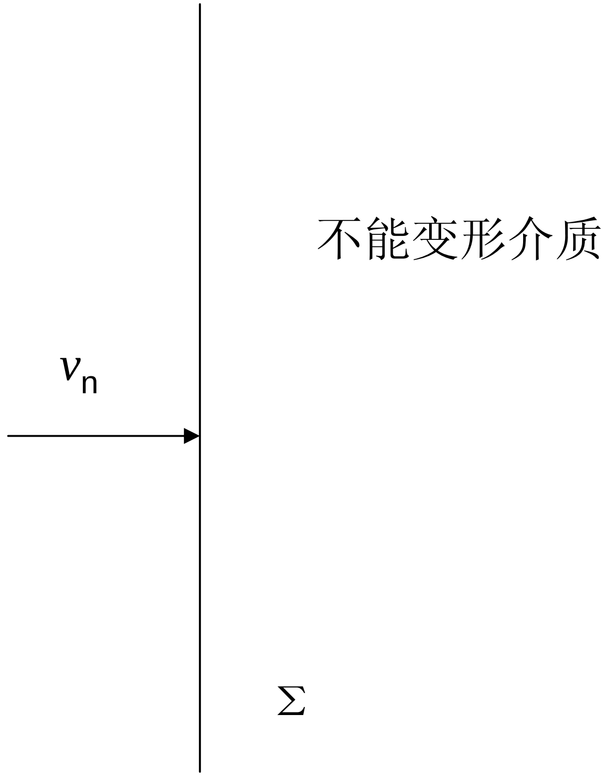
$$p\big|_{\Sigma} = 0$$



第一类、第二种边界条件

- 绝对硬边界条件

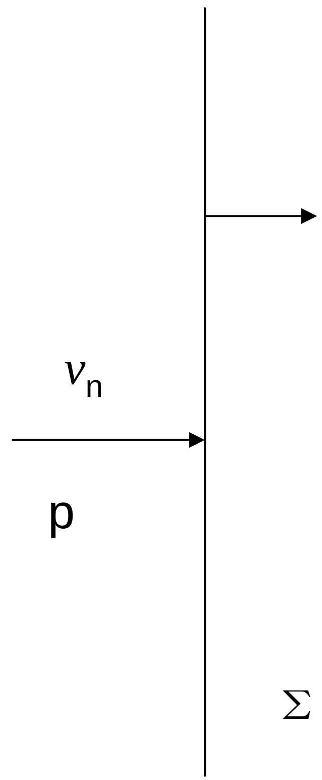
$$v_n = 0$$



第一类、第三种边界条件

- 给定声压和质点法线速度的关系（阻抗边界条件）

$$Z_n\big|_\Sigma = \left(\frac{p}{v_n}\right)_\Sigma$$

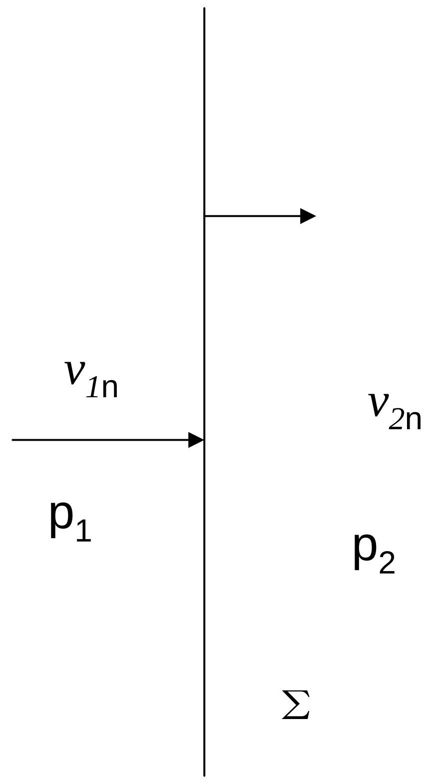


连接边界条件

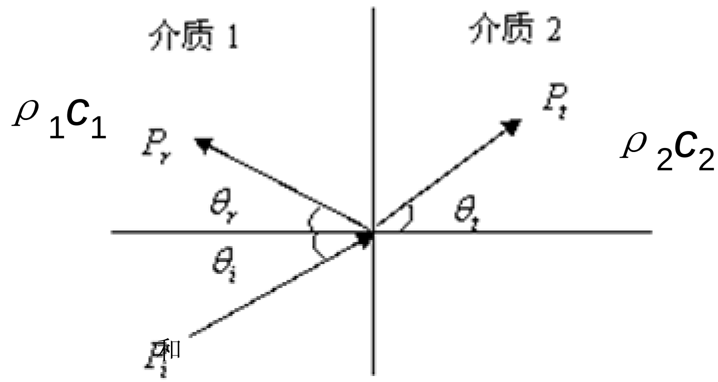
- 在不同声阻抗的介质交界面上的声波满足的条件。

$$p_1\big|_{\Sigma} = p_2\big|_{\Sigma}$$

$$v_{1n}\big|_{\Sigma} = v_{2n}\big|_{\Sigma}$$



超声波的入射和反射现象



平面声波的反射与折射

入射波声压

$$p_i = p_{iA} e^{j(\omega_i t - k_i x\cos\theta_i - k_i z\sin\theta_i)}$$

反射波

$$p_r = p_{rA} e^{j(\omega_r t + k_r x\cos\theta_r - k_r z\sin\theta_r)}$$

折射波的声压

$$p_t = p_{tA} e^{j(\omega_t t - k_t x\cos\theta_t - k_t z\sin\theta_t)}$$

边界条件

第一种介质中的声压为：，$p_1 = p_i + p_r$

第二种介质中的声压就是折射声压，$p_2 = p_t$

在分界面$z=0$处，满足声压连续条件 $p_1\big|_{z=0} = p_2\big|_{z=0}$

和法向振速相等条件 $v_{1z}\big|_{z=0} = v_{2z}\big|_{z=0}$

，

入射介质中的质点振动速度

$z=\rho c=\frac{p}{v}$ $v=p/\rho c$ 对第一种介质，声阻抗为 $\rho_1 c_1$

入射波的引起的质点振动速度分布

$$v_i=\frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}e^{i(\omega_1 t-k_1 x\cos\theta_i-k_1 y\sin\theta_i)} \qquad v_i=\frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}e^{i(\omega_1 t-k_1 y\sin\theta_i)}$$

$$v_{in}=\frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_i e^{i(\omega_1 t-k_1 y\sin\theta_i)}$$

反射波的引起的质点振动速度分布

$$v_r=\frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}e^{i(\omega_1 t+k_1 x\cos\theta_r-k_1 y\sin\theta_r)} \qquad v_i=\frac{p_{rA}}{\rho_1 c_1}e^{i(\omega_1 t-k_1 y\sin\theta_r)}$$

$$v_{rn}=-\frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_r e^{i(\omega_1 t-k_1 y\sin\theta_r)} \qquad v_{1n}=v_{in}+v_{rn}$$

折射介质中的质点振动速度

折射波的引起的质点振动速度分布

$$v_t = \frac{p_{tA}}{\rho_2 c_2} e^{i(\omega_1 t - k_2 x\cos\theta_t - k_2 y\sin\theta_i)} \qquad v_t = \frac{p_{tA}}{\rho_2 c_2} e^{i(\omega_1 t - k_2 y\sin\theta_t)}$$

$$v_{tn} = \frac{p_{tA}}{\rho_2 c_2}\cos\theta_t e^{i(\omega_1 t - k_2 y\sin\theta_t)}$$

边界方程

$$p_1\big|_{x=0} = p_2\big|_{x=0}$$

$$v_{1n}\big|_{x=0} = v_{2n}\big|_{x=0}$$

$$p_1\big|_{x=0} = p_i + p_r\big|_{x=0} = p_{iA}e^{i(\omega_1 t - k_1 y\sin\theta_i)} + p_{rA}e^{i(\omega_1 t - k_1 y\sin\theta_r)}$$

$$p_2\big|_{x=0} = p_{tA}e^{i(\omega_1 t - k_2 y\sin\theta_t)}$$

$$p_{tA}e^{i(\omega_1 t - k_2 y\sin\theta_t)} = p_{iA}e^{i(\omega_1 t - k_1 y\sin\theta_i)} + p_{rA}e^{i(\omega_1 t - k_1 y\sin\theta_r)}$$

$$\frac{p_{tA}}{\rho_2 c_2}\cos\theta_t e^{i(\omega_1 t - k_2 y\sin\theta_t)} = \frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_i e^{i(\omega_1 t - k_1 y\sin\theta_i)} + \frac{p_{rA}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_r e^{i(\omega_1 t - k_1 y\sin\theta_r)}$$

结论

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t \\ k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t \end{cases}$$

声波遇到不同介质发生反射和折射后，声波的频率不变。

$$\theta_i = \theta_r \qquad \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{k_r}{k_i} = \frac{c_1}{c_2}$$

反射系数

$$p_{tA} = p_{iA} + p_{rA}$$

$$\frac{p_{iA}}{\rho_2 c_2}\cos\theta_t + \frac{p_{rA}}{\rho_2 c_2}\cos\theta_t = \frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_i - \frac{p_{rA}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_r$$

$$p_{iA}\left(\frac{\cos\theta_t}{\rho_2 c_2} - \frac{\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}\right) = p_{rA}\left(\frac{\cos\theta_t}{\rho_2 c_2} + \frac{\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}\right)$$

$$r = \frac{p_{rA}}{p_{iA}} = \frac{\dfrac{\cos\theta_t}{\rho_2 c_2} - \dfrac{\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}}{\dfrac{\cos\theta_t}{\rho_2 c_2} + \dfrac{\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}} = \frac{\rho_1 c_1 \cos\theta_t - \rho_2 c_2 \cos\theta_i}{\rho_1 c_1 \cos\theta_t + \rho_2 c_2 \cos\theta_i}$$

入射波、反射波、折射波法向声阻抗

- 定义入射波、反射波声阻抗：

$$Z_{S1} = \frac{\rho_1 c_1}{\cos\theta_i}$$

$$Z_{S1R} = Z_{S1} = \frac{\rho_1 c_1}{\cos\theta_i}$$

- 折射波声阻抗：

$$Z_{S1} = \frac{\rho_2 c_2}{\cos\theta_t}$$

反射系数

$$r=\frac{p_{rA}}{p_{iA}}=\frac{\dfrac{\cos\theta_t}{\rho_2c_2}-\dfrac{\cos\theta_i}{\rho_1c_1}}{\dfrac{\cos\theta_t}{\rho_2c_2}+\dfrac{\cos\theta_i}{\rho_1c_1}}=\frac{\rho_1c_1\cos\theta_t-\rho_2c_2\cos\theta_i}{\rho_1c_1\cos\theta_t+\rho_2c_2\cos\theta_i}$$

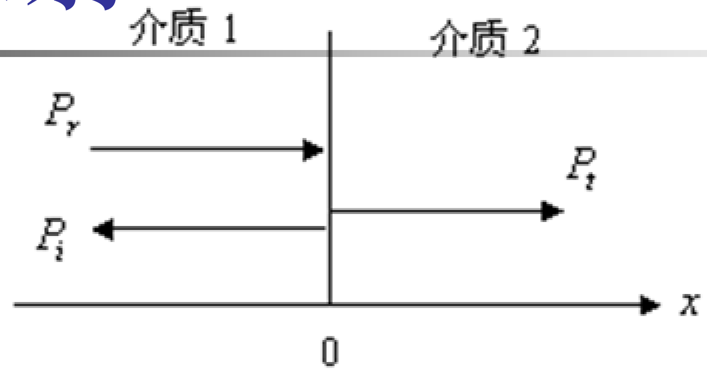
$$=\frac{Z_{s2}-Z_{s1}}{Z_{s2}+Z_{s1}}$$

透射系数

$$\frac{p_{tA}}{\rho_2 c_2}\cos\theta_t + \frac{p_{tA}}{\rho_1 c_1}\cos\theta_i = \frac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}(\cos\theta_i + \cos\theta_i)$$

$$t_p = \frac{p_{tA}}{p_{iA}} = \frac{\dfrac{2\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}}{\dfrac{\cos\theta_t}{\rho_2 c_2} + \dfrac{\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}} = \frac{2Z_{s2}}{Z_{s2} + Z_{s1}}$$

垂直入射



垂直入射声波的反射与透射

$$r_p = \frac{p_{rA}}{p_{iA}} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

$$t_p = \frac{p_{tA}}{p_{iA}} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

反射系数、折射系数的物理含义

反射系数为反射波声压振幅和入射波振幅之比，投射系数为折射声波声压振幅和入射波振幅之比。

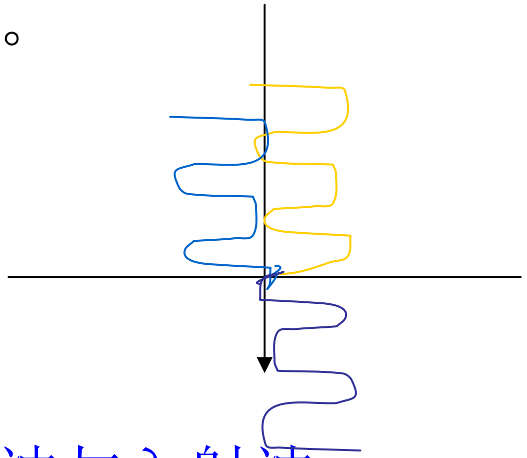
- 反射系数 ，反射波
- 折射系数 ，折射波
- 声阻抗差距 、反射系数 当选择一种标准介质，可以通过回波信号的强弱确定介质的组织性质

垂直入射时

$z_1 = z_2$ ，匹配， $r_p = 0$ $t_p = 1$

$$r_p = \frac{p_{ra}}{p_{ia}} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$$

这说明：尽管两种介质不一样，但是只要特性阻抗相同，对于声传播来讲，这种分界面就象不存在一样。



"硬"介质→"软"介质的入射

$z_2 < z_1$ $r_p < 0$ $t_p > 0$

反射波与入射波的速度同相，但是反射波与入射波的声压反相。在物理上，接近于非弹性碰撞。

$$t_p = \frac{p_{tA}}{p_{iA}} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

垂直入射（续）

$$t_p = \frac{p_{tA}}{p_{iA}} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

"软"介质→"硬"介质的入射特性阻抗大的介质相对于特性阻抗小的介质较"硬"，

$$r_p = \frac{p_{ra}}{p_{ia}} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$$

$z_2 > z_1$ $r_p > 0$ $t_p > 0$

反射波与入射波的声压同相。在物理上，接近于弹性碰撞。

（软反射，边界十分柔软）

$z_2 << z_1$ $r_p \approx -1$ $t_p \approx 0$

声压的大小相同，相位相反，这也是**全反射**。同样在介质1中形成驻波，分界面是声压的波节、速度的波腹。介质2中仍然没有声波。

垂直入射（续）

$$r_p = \frac{p_{ra}}{p_{ia}} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$$

（硬反射，边界十分坚硬）

$$z_2 >> z_1$$

$$r_p \approx 1 \qquad t_p \approx 2$$

$$t_p = \frac{p_{tA}}{p_{iA}} = \frac{2z_2}{z_1 + z_2}$$

入射波声压与反射波声压大小相同，相位相同，合成声压是两倍，这实际上是**全反射**。介在介质2中没有声波的传播，它的声压是分界面处的声压，为静态声压。

斜入射

$$r_p = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \qquad z_1 = \frac{p_i}{v_{ix}} = \frac{\rho_1 c_1}{\cos\theta_i}$$

$$t_p = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \qquad z_2 = \frac{p_t}{v_{tx}} = \frac{\rho_2 c_2}{\cos\theta_t}$$

密度比：$m = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

介质2对1的折射率：$n = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2}$

$$r_p = \frac{p_{ra}}{p_{ia}} = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_i - \rho_1 c_1 \cos\theta_t}{\rho_2 c_2 \cos\theta_i + \rho_1 c_1 \cos\theta_t} = \frac{m\cos\theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}{m\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

$$t_p = \frac{p_{ta}}{p_{ia}} = \frac{2\rho_2 c_2 \cos\theta_i}{\rho_2 c_2 \cos\theta_i + \rho_1 c_1 \cos\theta_t} = \frac{2m\cos\theta_i}{m\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

全透射

$$m\cos\theta_i - \sqrt{n^2 \sin^2\theta_i} = 0 \qquad r_p = 0, t_p = 1 \qquad \sin\theta_{i0} = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1}}$$

称为**全透角**。并不是所有的介质界面都可以发生全透射现象

$$0 \le \frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1} \le 1$$

m>n>1，→ $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ 且 $c_1 > c_2$

m<n<1，→ $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$ 且 $c_1 < c_2$

全反射

$$r_p = \frac{p_{ra}}{p_{ia}} = \frac{m\cos\theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}{m\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

$$t_p = \frac{p_{ta}}{p_{ia}} = \frac{2m\cos\theta_i}{m\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

从Snell定律， $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{c_1}{c_2}$ $c_2 \le c_1$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} \ge 1 \Rightarrow \sin\theta_i \le \sin\theta_t \Rightarrow \theta_i \le \theta_t$$

$\theta_{ic} = \arcsin\frac{c_1}{c_2}$ 为全内反射临界角。

$\theta_i > \theta_{ic}$ $\sin\theta_t > 1$ ，不存在实数的角 θ_t

介质2中没有通常意义的折射波。

入射角仍然等于反射角， $\theta_i = \theta_r$ 折射系数变成复数。

能量问题

$$I=\frac{p_A^2}{2\rho_0 c_0}$$

入射波声强 $I_i=\frac{\left|p_{iA}\right|^2}{2\rho_1 c_1}$ 反射波声强 $I_r=\frac{\left|p_{rA}\right|^2}{2\rho_1 c_1}$

透射波声强: $I_t{}'=\frac{\left|p_{tA}\right|^2}{2\rho_2 c_2}$,

反射率（反射波声强与入射波声强之比）

透射率（透射波声强与入射波声强之比）

$$r_I = \frac{\left|p_{rA}\right|^2}{2\rho_1 c_1} / \frac{\left|p_{iA}\right|^2}{2\rho_1 c_1} = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}\right)^2 = r_p^2$$

$$t_I = \frac{\left|p_{tA}\right|^2}{2\rho_2 c_2} / \frac{\left|p_{iA}\right|^2}{2\rho_1 c_1} = \frac{\left|p_{tA}\right|^2}{\left|p_{iA}\right|^2} \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} = \left(\frac{2z_2}{z_2 + z_1}\right)^2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = t_p^2 \cdot \frac{z_1}{z_2}$$

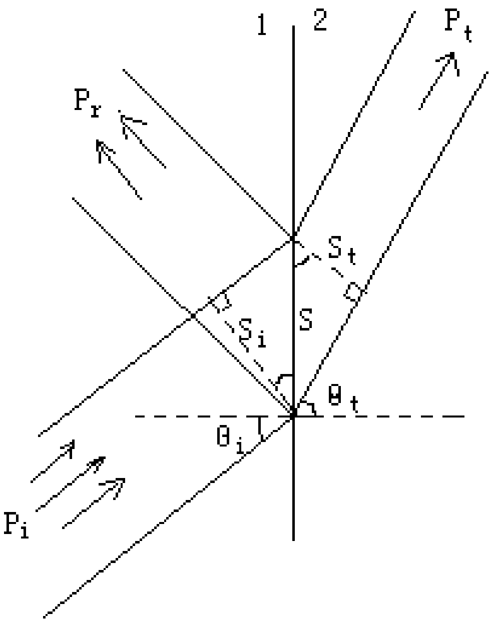
$$r_I + t_I = 1$$

斜入射的能量问题

$$r_I = \frac{|p_{ra}^2|/2\rho_1 c_1}{|p_{ia}^2|/2\rho_1 c_1} = \frac{(\rho_2 c_2 \cos\theta_i - \rho_1 c_1 \cos\theta_t)^2}{(\rho_2 c_2 \cos\theta_i + \rho_1 c_1 \cos\theta_t)^2}$$

$$t_I = \frac{|p_{ta}^2|/2\rho_{21} c_2}{|p_{ia}^2|/2\rho_1 c_1} = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 \cos^2\theta_i}{(\rho_2 c_2 \cos\theta_i + \rho_1 c_1 \cos\theta_t)^2}$$

$$r_I + t_I \neq 1$$



设入射声束的面积为 S_i ，透射声束的面积为

S_t ，平均声能量流的透射系数为

$$t_w = \frac{I_t S_t}{I_i S_i} = t_I \frac{S\cos\theta_t}{S\cos\theta_i} = t_I \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 \cos\theta_i \cos\theta_t}{(\rho_2 c_2 \cos\theta_i + \rho_1 c_1 \cos\theta_t)^2}$$

对于反射波，因为反射角=入射角，所以反射波束的面积=入射波束的面积

$$r_w = r_I = \frac{(\rho_2 c_2 \cos\theta_i - \rho_1 c_1 \cos\theta_t)^2}{(\rho_2 c_2 \cos\theta_i + \rho_1 c_1 \cos\theta_t)^2}$$

$$r_w + t_w = 1$$

即反射波的平均声能量流与透射波平均声能量流之和等于入射波的平均声能量流，符合能量守恒定律。

声波通过三层介质的传播

假设中间介质厚度为D，特性阻抗为 $z_2 = \rho_2 c_2$ $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$

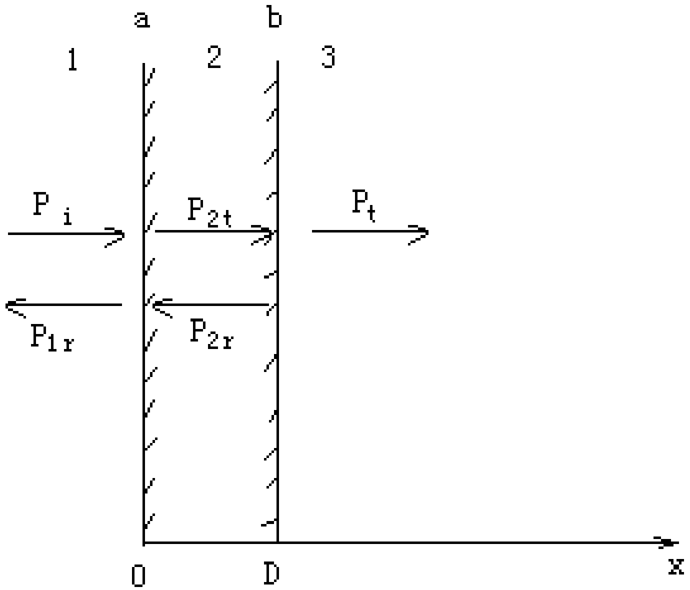
第一层分界面外的介质特性阻抗为 $z_1 = \rho_1 c_1$ $k_1 = \dfrac{\omega}{c_2}$

第三层分界面外的介质特性阻抗为

$z_3 = \rho_3 c_3$ $k_3 = \dfrac{\omega}{c}$

介质1中有

$$\begin{cases} p_i = p_{iA} e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ v_i = v_{iA} e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ p_{1r} = p_{1rA} e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ v_{1r} = v_{1rA} e^{j(\omega t + k_1 x)} \end{cases}$$



介质2中有

$$\begin{cases} p_{2t} = p_{2tA}e^{j(\omega t-k_2x)} \\ v_{2t} = v_{2tA}e^{j(\omega t-k_2x)} \\ p_{2r} = p_{2rA}e^{j(\omega t+k_2x)} \\ v_{2r} = v_{2rA}e^{j(\omega t+k_2x)} \end{cases}$$

对于介质3中的波

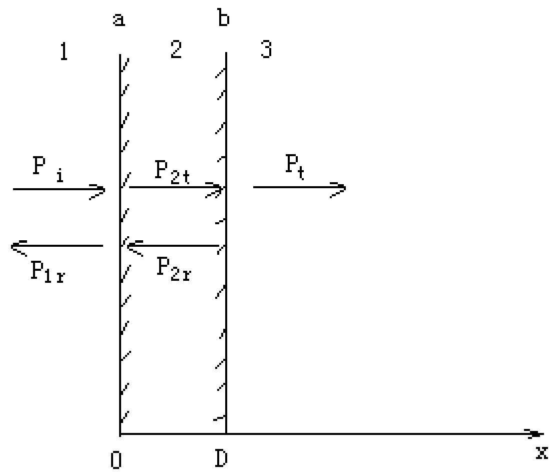
$$\begin{cases} p_t = p_{tA}e^{j[\omega t-k_3(x-D)]} \\ v_t = v_{tA}e^{j[\omega t-k_3(x-D)]} \end{cases}$$

透过系数

界面a、b即x=0、x=D处，有声学边界条件：声压连续、法向速度连续，

$$\left.\begin{aligned} p_{iA}+p_{1rA}&=p_{2tA}+p_{2rA} \\ v_{iA}+v_{1rA}&=v_{2tA}+v_{2rA} \end{aligned}\right\} ----x=0$$

$$\left.\begin{aligned} p_{2tA}e^{-jk_2D}+p_{2rA}e^{jk_2D}&=p_{tA} \\ v_{2tA}e^{-jk_2D}+v_{2rA}e^{jk_2D}&=v_{tA} \end{aligned}\right\} ----x=D$$



$$t_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{\dfrac{|p_{ta}|^2}{2\rho_3c_3}}{\dfrac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1c_1}}=\frac{4z_1z_3}{(z_1+z_3)^2\cos^2k_2D+(z_2+\dfrac{z_1z_3}{z_2})^2\sin^2k_2D}$$

不但与三种媒质的声阻抗有关,而且与中间层厚度有关

分析

$$k_2 D = 2\pi \frac{D}{\lambda_2} = n\pi \qquad D = \frac{\lambda_2}{2} n \qquad \cos k_2 D = 1, \sin k_2 D = 0,$$

$$t_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4z_1 z_3}{(z_1 + z_3)^2}$$

中间层厚度为半波长的整数倍时，声波全部透射，相当于中间层不存在。

$$t_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\dfrac{|p_{ta}|^2}{2\rho_3 c_3}}{\dfrac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1 c_1}} = \frac{4z_1 z_3}{(z_1+z_3)^2\cos^2 k_2 D + (z_2 + \dfrac{z_1 z_3}{z_2})^2 \sin^2 k_2 D}$$

$$k_2 D = 2\pi \frac{D}{\lambda_2} = \frac{(2n+1)}{2}\pi \qquad D = \frac{\lambda_2}{4} + n\lambda$$

$$\cos k_2 D = 0, \sin k_2 D = 1, \qquad z_3 = \sqrt{z_1 z_3}$$

$$\Rightarrow \qquad t_I = 1$$

中间层厚度为四分之一波长时，在中间层阻抗满足匹配时,声波全部透射

当两边介质声阻抗相同 $t_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{\frac{|p_{ta}|^2}{2\rho_1 c_1}}{\frac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1 c_1}}=\frac{4}{4\cos^2 k_2 D+(\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2})^2\sin^2 k_2 D}$

$k_2 D=2\pi\frac{D}{\lambda_2}<<1$ $\cos k_2 D\approx 1,\sin k_2 D\approx 0,$

$\Rightarrow$ $t_I\approx 1$

即中间层的厚度与层中的波长相比很小时，声波全部透过，相当于层不存在。

例：声学器件，镀上很薄的防水层，不会影响声波的传播。

平面声波入射在两种介质的平面

- 反射、折射定律
- 倾斜入射的发射透射系数
  - 全透射和全反射
- 垂直入射
- 分析方法

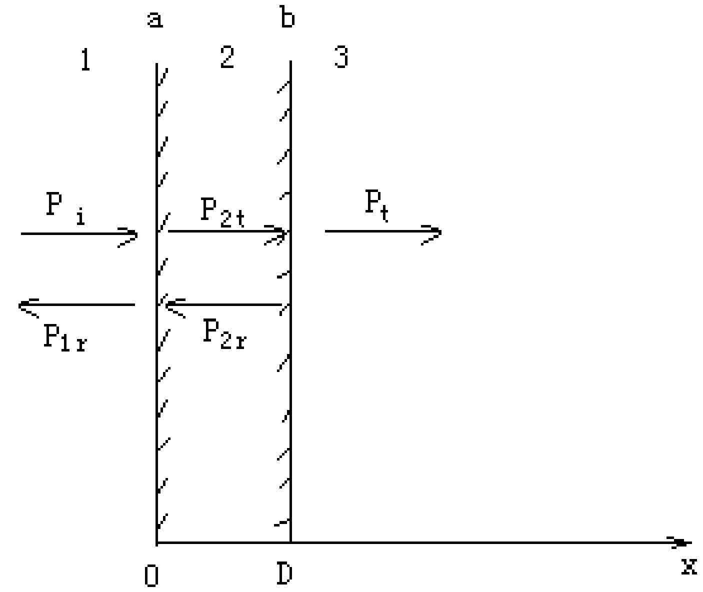
声波通过三层介质的传播

第一层分界面外的介质特性阻抗为 $z_1=\rho_1 c_1$ $k_1=\dfrac{\omega}{c_1}$

假设中间介质厚度为D，特性阻抗为 $z_2=\rho_2 c_2$ $k_2=\dfrac{\omega}{c_2}$

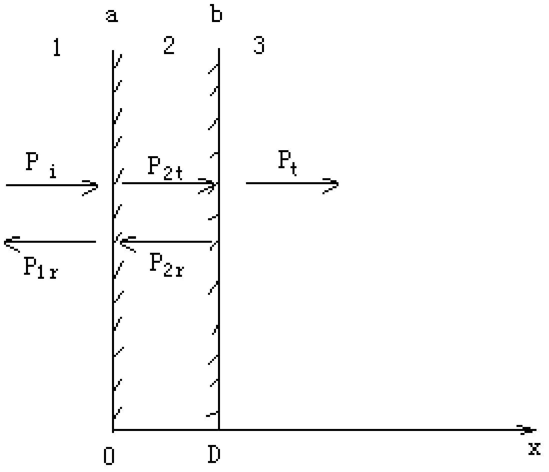
第三层分界面外的介质特性阻抗为 $z_3=\rho_3 c_3$ $k_3=\dfrac{\omega}{c_3}$

介质1中有
$$\begin{cases} p_i=p_{iA}e^{j(\omega t-k_1 x)} \\ v_i=\dfrac{p_{iA}}{\rho_1 c_1}e^{j(\omega t-k_1 x)} \\ p_{1r}=p_{1rA}e^{j(\omega t+k_1 x)} \\ v_{1r}=-\dfrac{p_{irA}}{\rho_1 c_1}e^{j(\omega t+k_1 x)} \end{cases}$$



介质2中有

$$\begin{cases} p_{2t} = p_{2tA} e^{j(\omega t - k_2 x)} \\ v_{2t} = \dfrac{p_{2tA}}{\rho_2 c_2} e^{j(\omega t - k_2 x)} \\ p_{2r} = p_{2rA} e^{j(\omega t + k_2 x)} \\ v_{2r} = -\dfrac{p_{2rA}}{\rho_2 c_2} e^{j(\omega t + k_2 x)} \end{cases}$$



对于介质3中的波

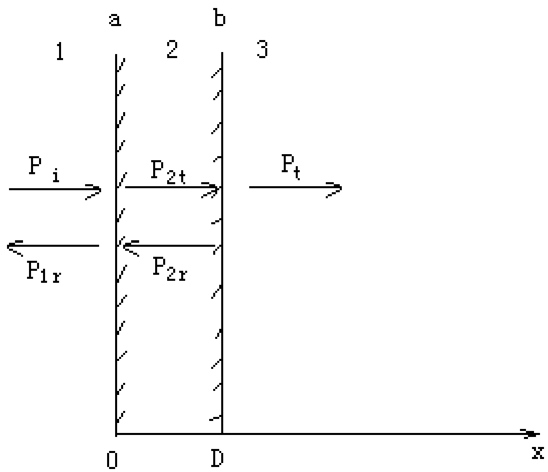
$$\begin{cases} p_t = p_{tA} e^{j[\omega t - k_3 (x-D)]} \\ v_t = \dfrac{p_{tA}}{\rho_3 c_3} e^{j[\omega t - k_3 (x-D)]} \end{cases}$$

透过系数

界面a、b即x=0、x=D处，有声学边界条件：声压连续、法向速度连续，

$$\left.\begin{aligned} p_{iA}+p_{1rA}&=p_{2tA}+p_{2rA} \\ v_{iA}+v_{1rA}&=v_{2tA}+v_{2rA} \end{aligned}\right\}----x=0$$

$$\left.\begin{aligned} p_{2tA}e^{-jk_2D}+p_{2rA}e^{jk_2D}&=p_{tA} \\ v_{2tA}e^{-jk_2D}+v_{2rA}e^{jk_2D}&=v_{tA} \end{aligned}\right\}----x=D$$



$$t_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{\dfrac{|p_{ta}|^2}{2\rho_3c_3}}{\dfrac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1c_1}}=\frac{4z_1z_3}{(z_1+z_3)^2\cos^2k_2D+(z_2+\dfrac{z_1z_3}{z_2})^2\sin^2k_2D}$$

不但与三种媒质的声阻抗有关,而且与中间层厚度有关

分析

$$t_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{\dfrac{|p_{ta}|^2}{2\rho_3c_3}}{\dfrac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1c_1}}=\frac{4z_1z_3}{(z_1+z_3)^2\cos^2k_2D+(z_2+\dfrac{z_1z_3}{z_2})^2\sin^2k_2D}$$

$$D=\frac{\lambda_2}{2}n \qquad k_2D=2\pi\frac{D}{\lambda_2}=n\pi \qquad \cos k_2D=1,\sin k_2D=0,$$

$$t_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{4z_1z_3}{(z_1+z_3)^2}$$

中间层厚度为半波长的整数倍时，声波全部透射，相当于中间层不存在。

$$t_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{\dfrac{|p_{ta}|^2}{2\rho_3c_3}}{\dfrac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1c_1}}=\frac{4z_1z_3}{(z_1+z_3)^2\cos^2k_2D+(z_2+\dfrac{z_1z_3}{z_2})^2\sin^2k_2D}$$

$$D=\frac{\lambda_2}{4}+n\lambda \qquad k_2D=2\pi\frac{D}{\lambda_2}=\frac{(2n+1)}{2}\pi$$

$$\cos k_2D=0,\sin k_2D=1, \qquad z_2=\sqrt{z_1z_3}$$

$$\Rightarrow \qquad t_I=1$$

中间层厚度为四分之一波长时，在中间层阻抗满足匹配时,声波全部透射

当两边介质声阻抗相同

$$t_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{\dfrac{|p_{ta}|^2}{2\rho_1c_1}}{\dfrac{|p_{ia}|^2}{2\rho_1c_1}}=\frac{4}{4\cos^2 k_2D+(\dfrac{z_2}{z_1}+\dfrac{z_1}{z_2})^2\sin^2 k_2D}$$

$$k_2D=2\pi\frac{D}{\lambda_2}<<1 \qquad \cos k_2D\approx 1,\sin k_2D\approx 0,$$

$$\Rightarrow \qquad t_I\approx 1$$

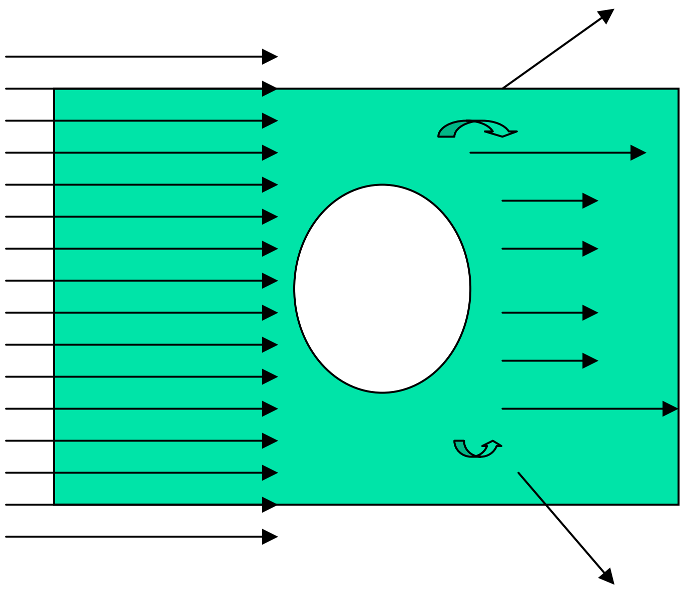
即中间层的厚度与层中的波长相比很小时，声波全部透过，相当于层不存在。

例：声学器件，镀上很薄的防水层，不会影响声波的传播。

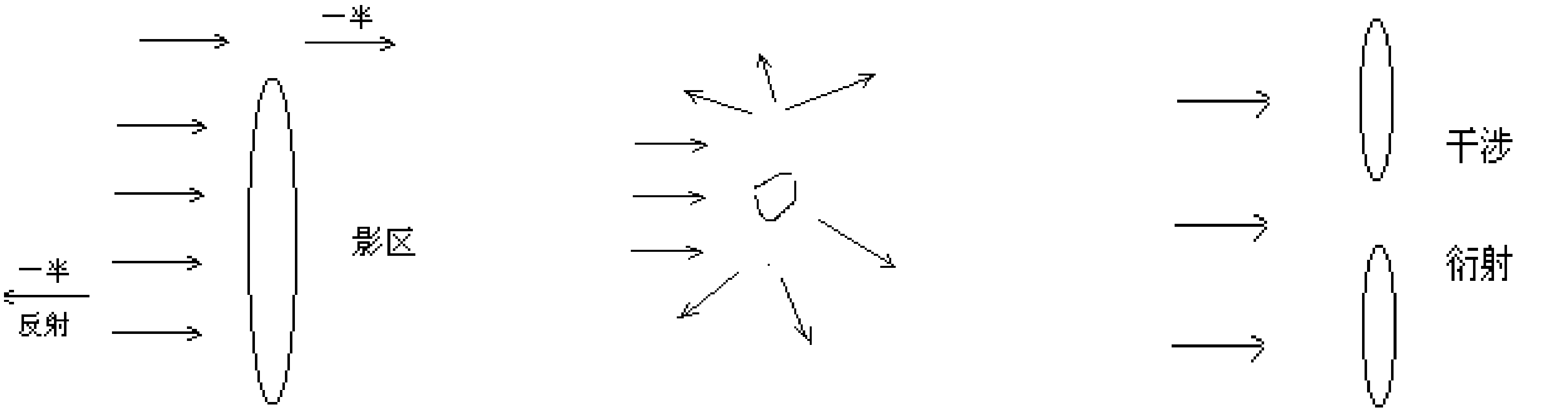
声波的干涉、散射和衰减

衍射和散射

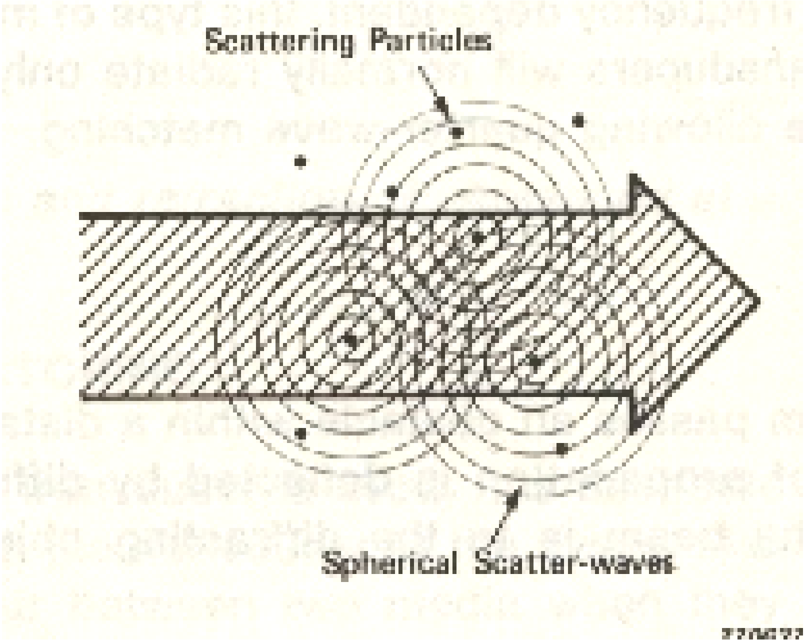
- 界面无限大



不同物体对声波的影响



物体的散射



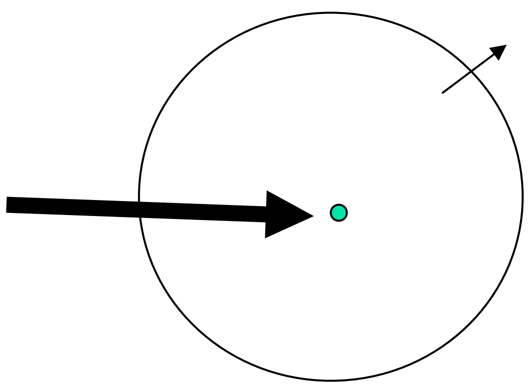
散射强度的描述

- 入射波被散射的（散射）功率与入射波的强度之比

$$\sigma = \frac{w_s}{I_s}$$

- 如果散射波的在球面r0平均声压为p_S,，入射声压为P_i

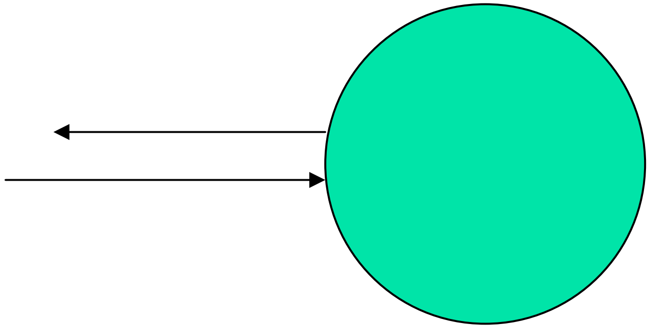
$$\sigma = \frac{4\pi r_0^2 p_s^2}{p_i^2}$$



大刚性物体近似

$$kr_0 = 2\pi \frac{r_0}{\lambda} >> 1$$

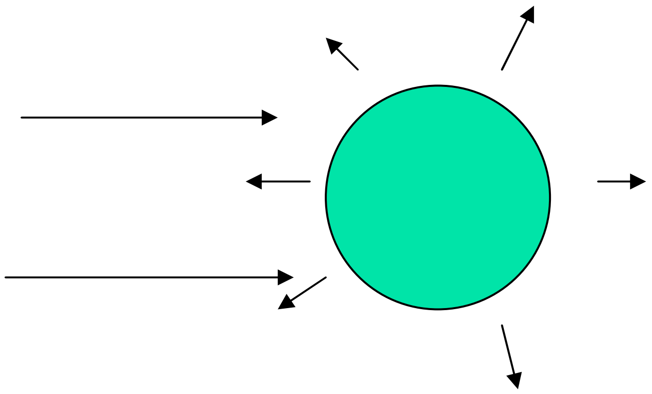
$$\sigma = 4\pi r_0{}^2$$



小刚性物体近似

$$kr_0 = 2\pi \frac{r_0}{\lambda} << 1$$

$$\sigma \approx \frac{7\pi^3 V_0^{\ 2}}{\lambda^4}$$



与主介质声学性质相近的物体

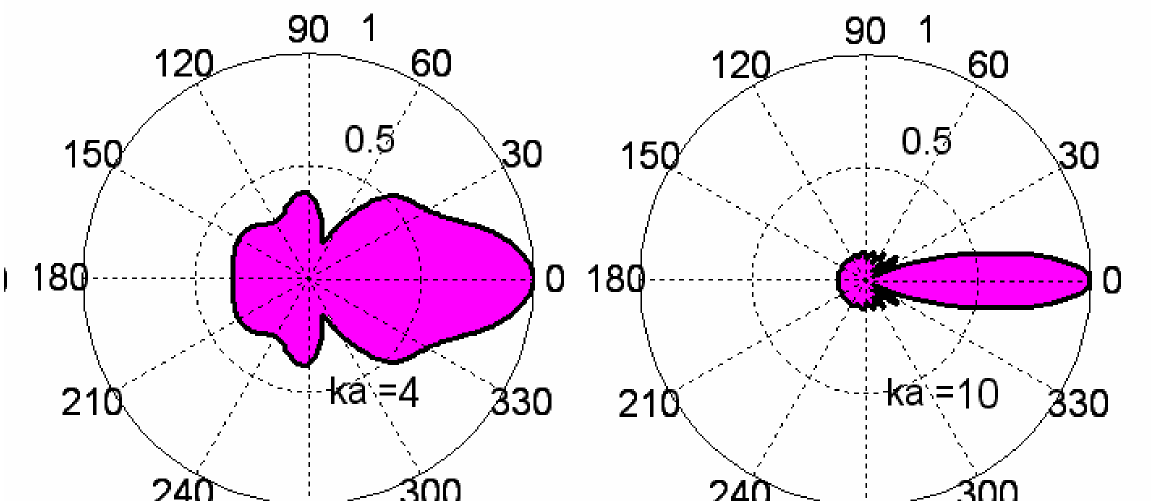
$$z \approx z_0$$

$$\sigma = \frac{4\pi k^4 r_0^{\ 6}}{9}\left(\left|\frac{G_e - G}{G}\right|^2 + \frac{1}{3}\left|\frac{3\rho_e - 3\rho}{2\rho_e - \rho}\right|^2\right)$$

刚性体散射

当频率较高或球体比较大时 kr_0 >>1

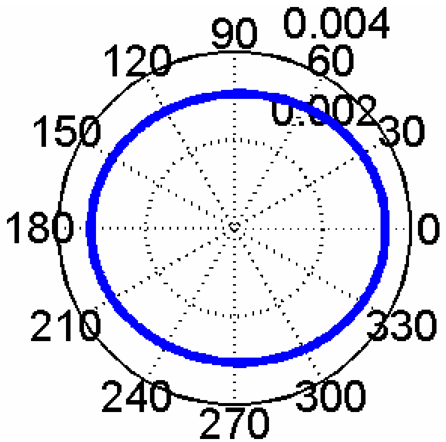
圆球背面形成声影区，圆球的前方，造成“反射声”。也就是说，当高频，大球时，圆球形成了反射体，挡住了声波的向前传播。



小刚球

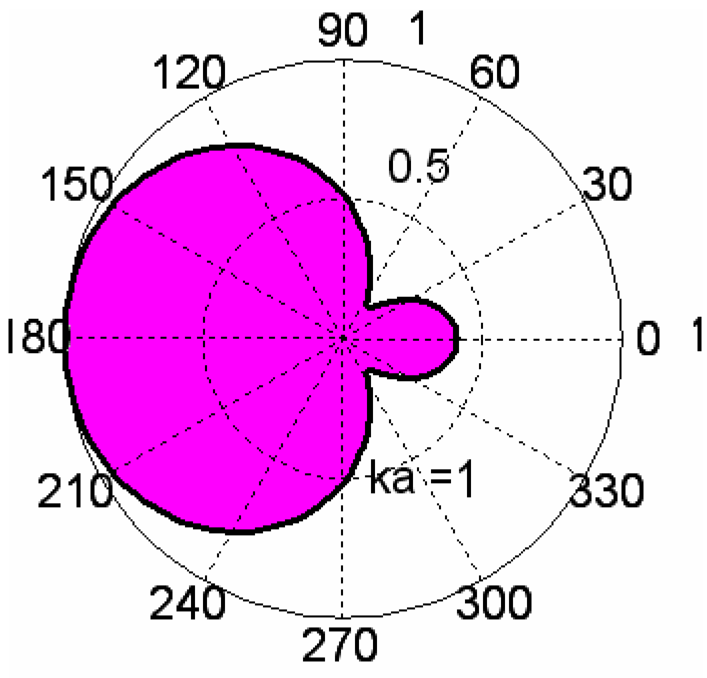
当频率比较低或球体比较小 $kr_0 << 1$

平均散射功率小一部分，与频率和球体半径的四次方成正比。也就是说，频率f降低一半，或半径小一半，散射功率降低到原来的1/16。低频，小球时圆球对声波传播的影响很小，大部分声波可以绕过圆球。

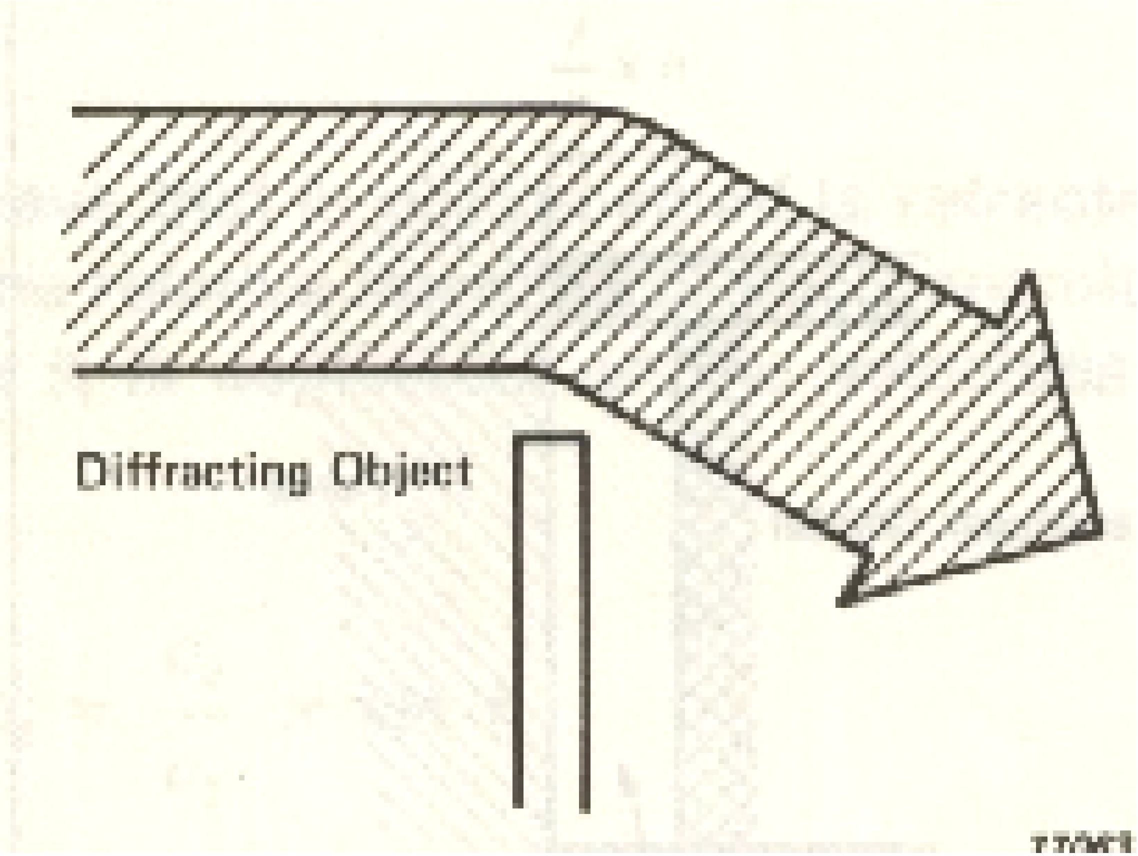


与波长接近

kr_0 增大时，散射声强在入射方向上逐渐增强，指向性越来越复杂；



衍射



超声波的干涉和吸收

声波的叠加原理

波的叠加原理：在两列或多列波的交叠区域，波场中某点的振动等于各个波单独存在时在该点所产生振动之和。

$$p = p_1 + p_2$$

声波干涉必要条件

同频率；
振动方向相同；
对给定的**P**点，波振动相位差恒定。

$$\delta(P)=\varphi_2(P)-\varphi_1(P)$$ 不随时间变化

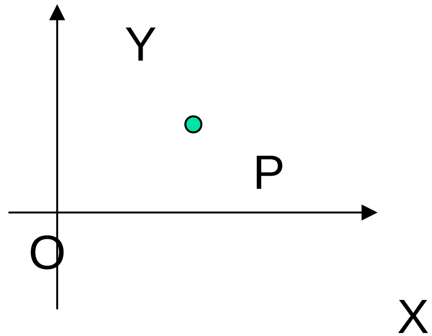
— 单频声波

频率相同或相近的声波叠加

声波的相干性

具有相同频率、固定相位差的声波的叠加，这时声波发生干涉。

$$p_1 = p_{1A}\cos(\omega t - \varphi_1)$$
$$p_2 = p_{2A}\cos(\omega t - \varphi_2)$$



固定相位差指的是相位差 $\Psi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$p = p_1 + p_2 = p_{1A}\cos(\omega t - \varphi_1) + p_{2A}\cos(\omega t - \varphi_2) = p_A\cos(\omega t - \varphi)$$

$$p_A^2 = p_{1A}^2 + p_{2A}^2 + 2p_{1A}p_{2A}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi = \arctan\frac{p_{1A}\sin\varphi_1 + p_{2A}\sin\varphi_2}{p_{1A}\cos\varphi_1 + p_{2A}\cos\varphi_2}$$

分析

$$p_A^2 = p_{1A}^2 + p_{2A}^2 + 2p_{1A}p_{2A}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$ $$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \sqrt{\bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_2}\cos\Psi$$

$\Psi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ 当时，两列声波的相位相同

$$p = p_{1A} + p_{2A}$$ $$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + 2\sqrt{\bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_2}$$

当 $\Psi = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ 时，两列声波的相位相反，那么

$$p = p_{1A} - p_{2A}$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - 2\sqrt{\bar{\varepsilon}_1 \cdot \bar{\varepsilon}_2}$$

驻波

驻波——由两列振幅相同的相干波沿同一直线相反方向传播时叠加所形成的一种波形不随时间变化的波。

沿**x**轴正、负方向传播的波动方程分别表示为：

$$p_1 = p_{A1}\cos(\omega t - kx)$$

$$p_2 = p_{A2}\cos(\omega t + kx)$$

$$p = p_1 + p_2 = p_{A1}\cos(\omega t - kx) + p_{A2}\cos(\omega t + kx) =$$
$$p_{A1}\cos(\omega t - kx) + p_{A1}\cos(\omega t + kx) + (p_{A2} - p_{A1})\cos(\omega t + kx)$$

驻波方程：

$$P = P_1 + P_2 = [2p_{A1}\cos kx]\cos\omega t + (p_{A2} - p_{A1})\cos(\omega t + kx)$$

波腹——振幅最大的各点。

波腹的位置：

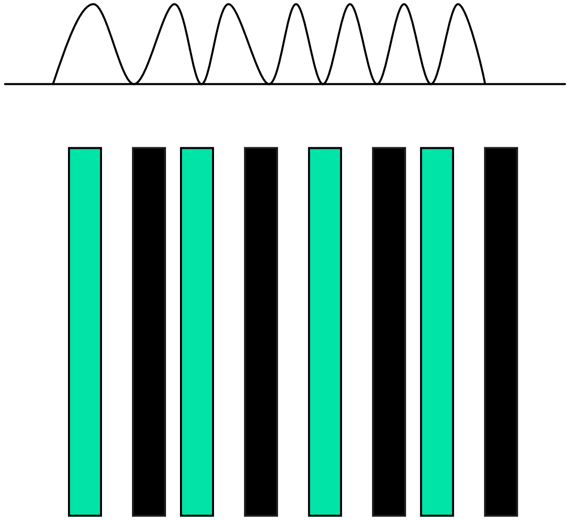
kx=±nπ， k=0，1，2，…

波节——振幅为零，即静止不动的位置（各点）。

波节的位置：

kx= ±（2k+1）π/2， k=0，1，2，…

$$P = P_1 + P_2 = [2p_{A1}\cos kx]\cos \omega t)$$



$$\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$

驻波的特点：

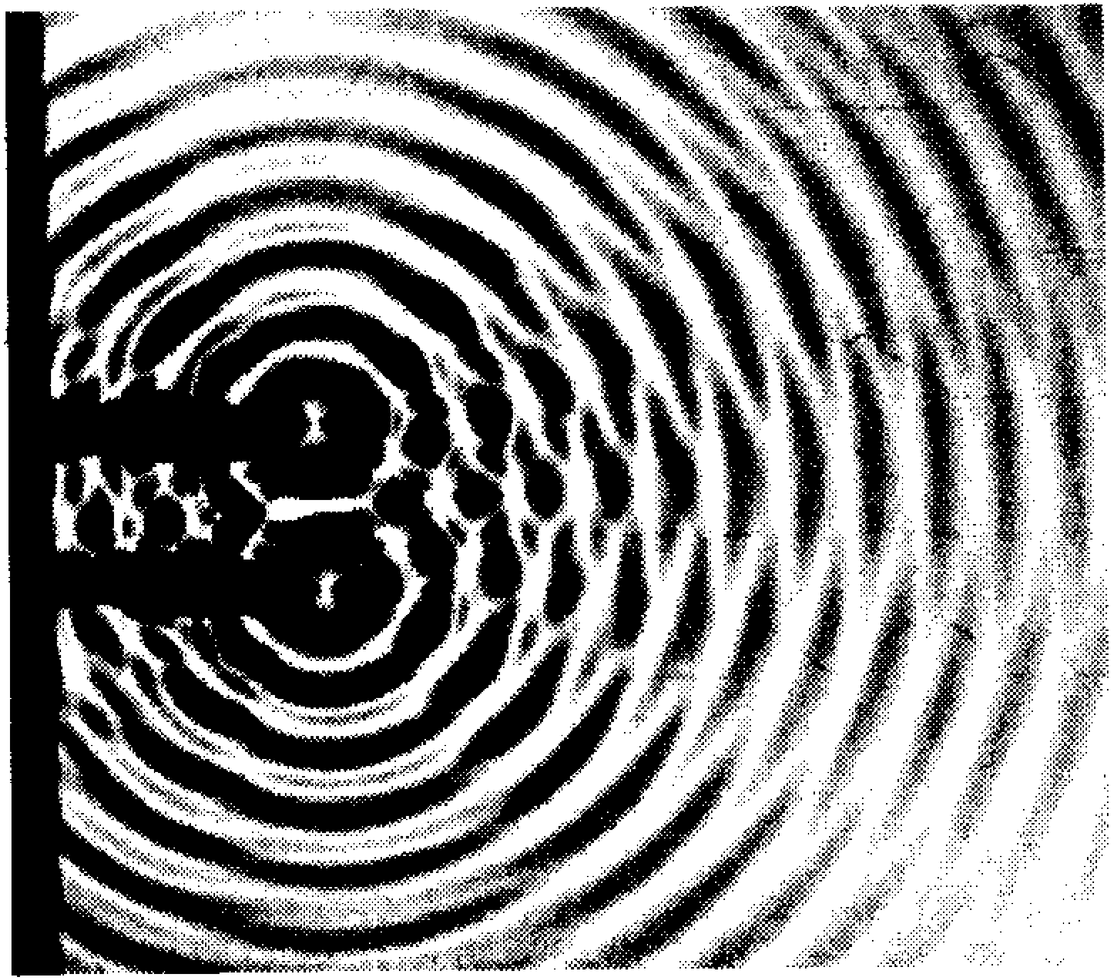
1、相邻两波节（腹）之间的距离均为半个波长，而波节与相邻波腹之间的距离为四分之一个波长。

2、在某一时刻，波节两侧的点的振动相位相反；在两波节之间的点却有相同相位，即它们同时到达最大位移，又同时到达平衡点。

3、两列波叠加波形的波腹和波节的位置不变。

4、驻波中没有能量的定向传播 。

$$P = P_1 + P_2 = [2p_{A1}\cos kx]\cos\omega t)$$



水波的干涉现象

驻波比

$$P = P_1 + P_2 = [2p_{A1}\cos kx]\cos\omega t + (p_{A2} - p_{A1})\cos(\omega t + kx)$$

$$SWR = \frac{P_{\max}}{P_{\min}} = \frac{P_{A1} + P_{A2}}{P_{A1} - P_{A2}}$$

$$\frac{P_{A1}}{P_{A2}} = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

拍的干涉

- 设同方向不同频率的简谐振动的振幅相同，初相位也相同

$$p_1 = pa\cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$p_2 = pa\cos(\omega_2 t + \phi)$$

合振动为：

$$p = p_1 + p_2$$

$$= pa\cos(\omega_1 t + \varphi) + pa(\cos\omega_2 t + \varphi)$$

由三角函数可知：

$$p=2p_a\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

上式可认为是振幅为$\left|2p_a\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t\right|$,角频率为$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$的周期性振动。

若分振动的角频率ω_1和ω_2都很大，且两者之差$\omega_2-\omega_1$比较小.

$$p = 2p_a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t$$

合振动的振幅最大为 2 **Pa**，也会出现分振动的振幅矢量相反即合振动的振幅最小为零，所以合振动的振幅就在**2A**和**0**之间做缓慢的周期性变化，这种由两个频率都比较大，但频率差很小的同方向的振动合成会产生合振幅做周期性变化加强和减弱的现象叫做拍。

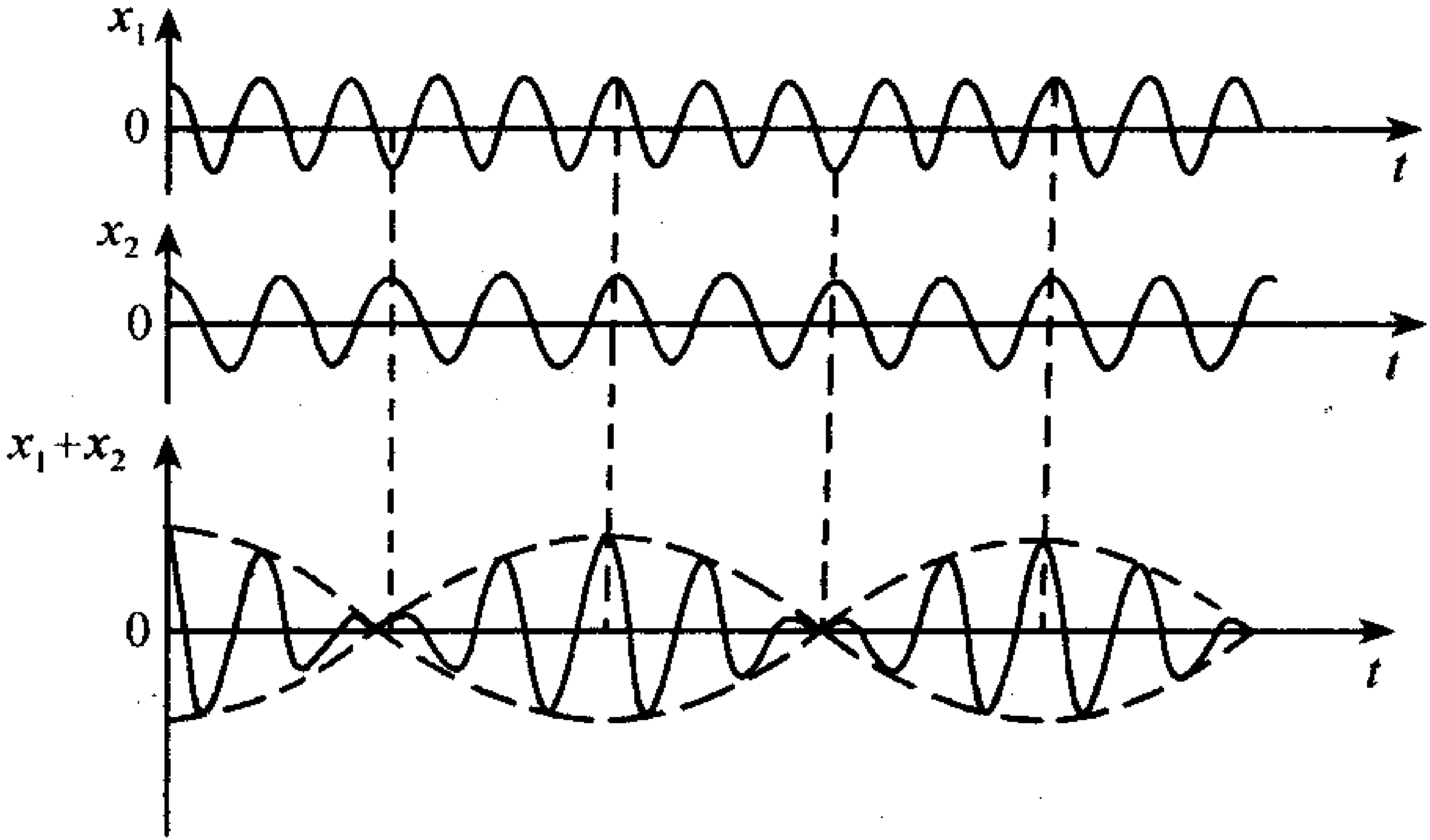


图 4-7　拍的形成

由于合振动的振幅为$\left|2P_a\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\right|$，故合振幅的变化周期为：

$$T'=\frac{\pi}{\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right|}=\frac{2\pi}{|\omega_2-\varpi_1|}$$

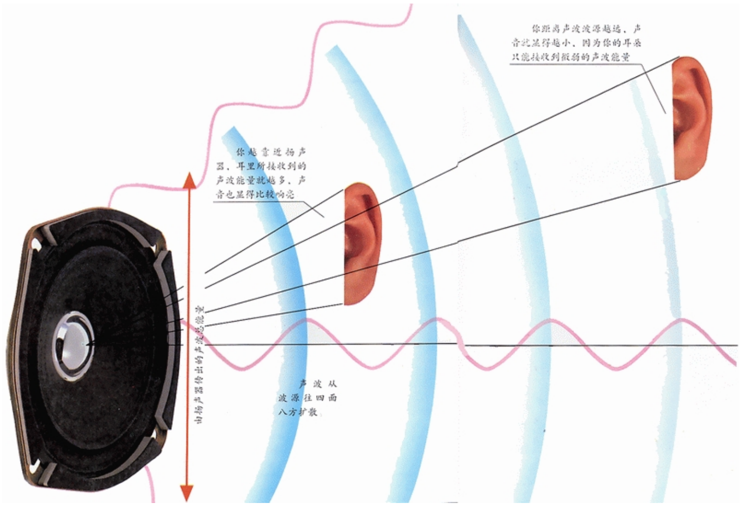
而合振幅变化的频率为：

$$f=\frac{1}{T'}=\frac{|\omega_2-\omega_1|}{2\pi}=|f_2-f_1|$$

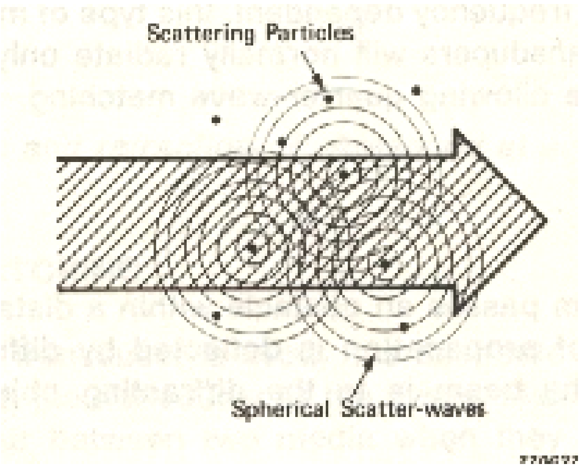
这一频率叫做拍频，即单位时间内振幅加强或减弱的次数。而合振动的振动频率为：

$$f_h=\frac{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}{2\pi}=\frac{\omega_1+\omega_2}{4\pi}=\frac{f_1+f_2}{2}$$

声波的衰减



你距离声波波源越远，声音就显得越小，因为你的耳朵只能接收到微弱的声波能量
你越靠近扬声器，耳里所接收到的声波能量就越多，声音也显得比较响亮
由扬声器传出的声波总能量
声波从波源往四面八方扩散



Scattering Particles
Spherical Scatter-waves

吸收衰减

它的本质是声能转化为其他形式能量。

吸收的机制有：

1、由于介质的粘滞性而产生的粘滞吸收。

2、热传导和热辐射吸收。

3、弛豫吸收，介质吸收声能后分子势能增加，经过一段时间，再将声波发射出去。

吸收系数:声波经过单位距离后,声压的减少与开始声压之比

$$\alpha = -\frac{\Delta p}{P\Delta x} = -\frac{dp}{pdx}$$

$$P = p_0 e^{-ax}$$

$$I_x = I_0 e^{-2ax}$$

衰减系数: 吸收系数和散射系数之和

声波在介质中传播时,当其能量衰减到原能量的一半时的介质厚度,就是超声波对这一介质的半价层.

半价层的厚度代表吸收能力的大小,厚度越大, 吸收能力越弱.且f↑穿透能力↓,半价层↓,高频 率时,穿透能力↓,不足以深部治疗；而频率过低, 组织吸收少,不足以产生有效的治疗作用.